مساله بهینه سازی با شرایط KKT

نمونه ای از طرح کلی مساله:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & h_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots m \\ & \ell_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots r \end{aligned}$$

شرایط KKT

- $0 \in \partial f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \partial h_i(x) + \sum_{j=1}^{r} v_j \partial \ell_j(x)$ (stationarity)
- $u_i \cdot h_i(x) = 0$ for all i (complementary slackness)
- $h_i(x) \le 0, \ \ell_j(x) = 0$ for all i, j (primal feasibility)
- $u_i \ge 0$ for all i (dual feasibility)

برای حل مساله های برنامه ریزی شده غیرخطی می توان از شرایط Karush-Kuhn-Tucker استفاده کرد.

به عنوان **مثال** بهینه سازی مساله غیرخطی زیر را بررسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & f(x,y) = xy \\ \text{subject to} \quad & x + y^2 \le 2 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که ناحیه محتمل، محدود است و باید یک مقدار ماکزیمم داشته باشد زیرا تابع پیوسته در مجموعه ای بسته و محدود دارای ماکزیمم است.

محدودیت های تابع موارد زیر است:

$$g_1(x,y) = x + y^2 \le 2, \ g_2(x,y) = -x \le 0, \ g_3(x,y) = -y \le$$

0.

بدین ترتیب شرایط KKT بصورت زیر نوشته می شود:

$$
\begin{aligned}
y-\lambda_1+\lambda_2&=0\\
x-2y\lambda_1+\lambda_3&=0\\
\lambda_1(2-x-y^2)&=0\\
\lambda_2 x&=0\\
\lambda_3 y&=0\\
x+y^2&\le 2\\
x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3&\ge 0
\end{aligned}
$$

در هر یک از این معادلات $\lambda_i(b_i-g_i(x_1,\ldots,x_n))=0,$ حداقل یکی از دو عامل باید صفر شود. با n شرط بطور بالقوه 2n مورد برای حل وجود دارد با این حال می شود با تفکر در آنها این موارد را کاهش داد.

مورد۱:

فرض می کنیم $\lambda_1=0.$

اولین شرط KKT:

$$y+\lambda_2=0$$

دومین شرط KKT:

$$x+\lambda_3=0.$$

وقتی همه مقادیر مثبت باشند تنها یک حالت اتفاق می افتد و آن هم به این صورت است:

$$x=y=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

درواقع شرایط KKT وقتی اقناع می شود که

$$x=y=\lambda_1=$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

گرچه واضح است که این مقدار ماکزیمم نیست زیرا f(0,0)=0 ولی f(x,y)>0 نقاط داخل ناحیه محتمل می باشد.

مورد۲:

فرض کنید $x + y^2 = 2.$

حداقل یکی از دو مقدار $x = 2 - y^2$ و y باید مثبت باشد.

مورد ۲-۱:

فرض کنید x>0 آنگاه

$$\lambda_2 = 0.$$

طبق شرط اول KKT :

$$\lambda_1 = y.$$

شرط دوم KKT:

$$x - 2y\lambda_1 + \lambda_3 = 2 - 3y^2 + \lambda_3 = 0,$$

$$3y^2 = 2 + \lambda_3 > 0,$$

$$\lambda_3 = 0.$$

بنابراین داریم:

$$y = \sqrt{2/3},$$
$$x = 2 - 2/3 = 4/3.$$

بدین ترتیب تمامی شرایط KKT را اقناع می کند.

مورد ۲-۲:

فرض کنید x=0 باشد آنگاه $y = \sqrt{2}.$ زیرا y>0 بوده و داریم:

$$\lambda_3 = 0.$$

از شرط دوم KKT $\lambda_1 = 0.$ را داریم که ما را به مورد۱ برمی گرداند.

تنها در دو مورد از شرایط نقطه ماکزیمم را یافتیم بصورت:

$$(0, 0) \text{ and } (4/3, \sqrt{2/3}).$$

نقطه ماکزیمم موردقبول در ناحیه $(4/3, \sqrt{2/3}).$ **می باشد.**